数学物理方程

王 岗 伟
河北经贸大学数学与统计学院
gangwei@hueb.edu.cn
https://wanggangwei82.github.io/

2023

内容提要

课程简介

- 本章介绍最典型的椭圆型方程–调和方程(又称拉普拉斯(Laplace)方程)和泊松(Poisson)方程。在§1中介绍了调和方程的边界条件和边值问题的提法§2中应用格林公式，导出了调和方程解的平均值定理，进而证明了调和函数的极值原理,然后应用极值原理讨论了第一边值问题的解的唯一性和稳定性。§3中对特殊区(球、半空间等)，导出了第一边值的表达式。§4中证明了强极值原理,利用它讨论第二边值问题解的唯一性问题。本章中对调和函数的其它一些重要性质也作了介绍。对于一般区域上第一边值问题解的存在性问题，仅介绍一些结果开始出几种证明方法。

§1建立方程、定解条件

- 1. 方程的导出在这一章中我们主要研究调和方程(又称拉普拉斯方程)

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1}$$

及泊松方程

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z) \tag{1.2}$$

的基本定解问题及解的性质。

§1建立方程、定解条件

方程(1.1)及(1.2)在力学、物理学问题中经常碰到。在第一章中我们研究了膜的振动问题，当研究在不随时间而变化的外力$F(x,y)$ 作用下膜的平衡时，膜的位移u 和时间无关，于是膜振动方程

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F(x,y,t)$$

就化为膜平衡方程

$$0=T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F(x,y).$$

§1建立方程、定解条件

或写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{F(x,y)}{T},$$

它就是二维的泊松方程。从第二章中的讨论我们也可看到，当研究稳定状态热的传导问题时也导致泊松方程,特别在没有热暴时就得到调和方程。此外，从复变函数论中知道，一个解析函数的实部与虚部分别满足二维的调和方程。

调和方程和泊松方程的应用十分广泛,下面再介绍几个导致调和方程和泊松方程的实例。

§1建立方程、定解条件

- 1. (1) 引力位势

在数学史上导致调和方程的一个著名的实例来自牛顿万有引力。根据牛顿万有引力定律，位于(x_0, y_0, z_0) 处质量为M 的质点对位于(x, y, z) 处具单位质量的质点的引力，其大小等于M/r^2，而作用方向沿者这两点的连线，指问(x_0, y_0, z_0) 点，其中$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ 为这两点之间的距离。写成向量形式，即为

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = -\frac{M}{r^2}\left(\frac{x-x_0}{r}, \frac{y-y_0}{r}, \frac{z-z_0}{r}\right).$$

§1建立方程、定解条件

$\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 称为引力场函数。显然引力场函数是位势函数

$$\varphi(x,y,z)=\frac{M}{r}$$

的梯度; $\boldsymbol{F}=\operatorname{grad}\varphi$ 。除了允许相差一个任意常数外，位势函数是唯一确定的。

若有以密度$\rho(x,y,z)$ 分布在区域Ω 上的质量。那么它产生的引力场应该为其上各质点产生的引力场的叠加。在区域Ω 上的质量所产生的总引力位势应为

§1建立方程、定解条件

$$\varphi(x,y,z)=\iint_{\Omega}\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}. \tag{1.3}$$

通过直接计算可以验证，$\varphi(x,y,z)$ 在Ω 以外满足调和方程

$$\Delta\varphi=0.$$

还可以进一步验证，若$\rho(x,y,z)$ 满足Holder 条件$^{\oplus}$，则φ 在Ω 内满足泊松方程

$$\Delta\varphi=-4\pi\rho.$$

§1建立方程、定解条件

- （2）静电场的电位势

设空间中有一电荷密度为$\rho(x,y,z)$ 的静电场。在此电场内任取一由闭曲面Σ 包围的区域G, 由静电学知, 通过Σ 向外的电通量等于G 中总电量的4π 倍, 即成立

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{E}\cdot n ds = 4\pi \iiint_{\sigma} \rho dxdydz,$$

其中$\boldsymbol{E}$ 为电场强度矢量, 而$\boldsymbol{n}$ 为Σ 上的单位外法线向量。利用格林公式并注意到G 的任意性,可得

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho. \tag{1.4}$$

§1建立方程、定解条件

又由库仑定律可知，青电场是有势的，即存在静电位势$u = u(x, y, z)$，使

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u.$$

将其代入(1.4)式，即得静电位势u 满足以下的泊松方程

$$\Delta u = -4\pi\rho.$$

特别地，若在某区域中没有电荷存在，则在此区域中静电位势u 满足调和方程。

§1建立方程、定解条件

定义调和方程(1.1)的连续解，也就是说具有关于变量x和y的二阶连续偏导数并且满足方程(1.1)的连续函数解称为调和函数。

在两个自变量的情形，调和函数的许多性质已在复变函数论中讨论过，这里不再重复，下面的叙述将以二维的情形为主。

调和方程

定解条件和定解问题

- 为了在空间某一区域中确定方程的解，还必须附加一些定解条件。定解条件中只有边界条件，这种定解问题称为边值问题。

定解条件和定解问题

- 为了在空间某一区域中确定方程的解，还必须附加一些定解条件。定解条件中只有边界条件，这种定解问题称为边值问题。
- 如同第一章对膜振动方程所提的三种类型的边界条件，分别称为第一，第二，第三边值问题。

第一边值问题

- 在空间(x, y, z) 中某一区域Ω 的边界Γ 上给定了一个连续函数g, 要求找出这样的一个函数$u(x, y, z)$, 它在Ω 内是调和函数, 在$\Omega \cup \Gamma$ 上连续,并在Γ 上与已给的函数g 重合:

$$u|_{\Gamma} = g. \tag{1.5}$$

第二边值问题

- 在某光滑的闭曲面Γ上给出连续函数g，要寻找这样一个函数$u(x,y,z)$，它在Γ的内部区域Ω中是调和函数，在$\Omega\cup\Gamma$上连续，且在Γ上的任一点沿Γ的单位外法线方向n的方向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$存在，并且就等于已给函数$g$在该点的值:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r} = g. \tag{1.6}$$

第二边值问题

- 此外,在应用中我们还经常会遇到狄利克雷问题和诺伊曼问题的另一种提法。例如当确定某物体外部的稳定温度场时,就归结为求区域Ω 外的函数u,使满足方程(1.1) 和边界条件$u\big|_{r}=g$, 这里Γ 是Ω 的边界, g 表示物体表面的温度分布。又如在流体力学的绕流问题中, 常常需要确定某有界区域Ω 外部流场的速度分布。场是有势的, 而且所考虑的流体是不可压缩的,那么速度势φ 在Ω 的外部满足拉普拉斯方程(1.1), 且在绕流物体的边界Γ 上应有 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=0$ 。

第二边值问题

- 因此决定Ω 外部流场的速度分布的问题就归结为求一个在曲面Γ 外部为调和的函数，使它在Γ 上满足所给的边界条件。这样,我们看场是有势的，而且所考虑的流体是不可压缩的,那么速度势φ 在Ω 的外部满足拉普拉斯方程(1.1)，且在绕流物体的边界Γ 上应有$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0$ 。到，找一个函数u 在曲面Γ 外部为调和，而在曲面Γ 上满足所给的边界条件，这样的定解问题在实用上是很需要的,称它为拉普拉斯方程的外问题。

第二边值问题

- 与此相应,我们把上面第一个例子中所提的问题称为狄利克雷外问题,第二个例子中所提的问题称为诺伊曼外问题。拉普拉斯方程的外问题是在无穷区域上给出的,定解问题的解在无穷远处是否应该加以一定的限制呢?我们可举例说明当在无穷远处不加任何限制时,外问题的解并不唯一。例如考察以原点为心的单位球面Γ 作为边界曲面的狄利克雷外问题,并给出边界条件

$$u|_{\Gamma} = 1. \tag{1.7}$$

狄利克雷外问题

- 在空间(x,y,z) 的某一闭曲面Γ 上给定连续函数g, 要找出这样一个函数$u(x,y,z)$, 它在Γ 的外部区域Ω' 内调和(无穷远处除外), 在$\Omega'\cup\Gamma$ 上连续, 当点(x,y,z) 趋于无穷远时, $u(x,y,z)$ 一致地趋于零(即满足条件(1.7)), 并且它在Γ 上$1 建立方程、定解条件71 取所给的函数值:

$$u\big|_{r} = g. \tag{1.8}$$

诺伊曼外问题

- 在光滑的闭曲面Γ 上给出连续函数g, 要求找出这样一个函数$u(x,y,z)$, 它在闭曲面Γ 的外部区域Ω' 内调和, 在$\Omega'\cup\Gamma$ 上连续, 在无穷远处满足条件(1.7), 且在Γ 上任一点沿区域Ω' 的单位外法线方向n' (指向曲面Γ 的内部) 的法向导数$\frac{\partial u}{\partial}$, 存在, 并且满足

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r} = g. \tag{1.9}$$

诺伊曼外问题

- 为了和外问题相区别,我们有时把定解问题(1)及(2) 分别称为狄利克雷内问题和诺伊曼内问题。对于泊松方程(1.2) 的四种边值问题, 只要找出泊松方程的一个特解, 由叠加原理, 就能化为调和方程(1.1) 的对应的边值问题。当g 满足Holder条件时,这种特解是容易找到的(参见(1.3)式)。所以我们以后主要研究调和方程(1.1) 的边值问题。

变分原理

- 在物理和力学中有几个关于能量极大或极小的定律，它们与描述质量、动量、力、热量、电量等物理量为守恒或平衡的其它物理定律具有同样的重要性。由前两章,我们已知能量往往可用积分表示。这种积分表达式的极值问题被称为变分问题。某些物理学、力学的变分问题也会导出调和方程或泊松方程的定解问题。作为一个例子，我们考察薄膜的平衡问题。设有一边界固定的薄膜，在外力作用下处于平衡状态。力学中有如下的最小总位能原理：在一切可能的位移中，真实位移使总位能达到最小。采用第一章中的记号，用$u(x,y)$表示在(x,y) 处薄膜的垂直位移，$F(x,y)$ 表示垂直外力的密度。

变分原理

- 记薄膜在水平面Oxy 上的投影区域为Ω，它具有光滑边界Γ，则在外力F 作用下薄膜的总位能为(参见第一章(6.7) 式)

$$V=\iint_{\Omega}\left\{\frac{T}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]-Fu\right\}dxdy.$$

以$J(u)$ 表示总位能，不计一个常数因子，它可写为

$$J(u)=\iint_{a}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]-fu\right\}dxdy,\quad (1.10)$$

其中

$$f=\frac{F}{T}.$$

变分原理

- 因为薄膜的边界固定，“一切可能的位移”就是所有具有一定的光滑性，且在边界上等于零的位移函数。例如，按下式

$$V_0 = \left\{ v \in C^2(\Omega) \cap C'(\bar{\Omega}),\ v|_F = 0 \right|, \tag{1.11}$$

给定函数集合V_0，则一切可能的位移可取为集合V_0 中元素的全体。这样，最小总位能原理可以用如下的数学形式表述：若u 为真实位移，则$u \in V_{\mathrm{u}}$，且满足

$$J(u) = \min J(v). \tag{1.12}$$

第三章 调和方程

- 变分问题和泊松方程的边值问题有密切的问题。对于变分问题（1.12）与下述泊松方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ u|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \tag{1.13}$$

我们可证明如下的

定理1.1 (变分原理) 如果满足$(1,12)$ 的函数$u \in V_0$ 存在，它必满足(1.13)。反之，若u 是定解问题(1.13)属于V_0 的解,则u 必为变分问题(1.12) 的解。

变分原理的证明

- 证:若u 是变分问题(1.12) 的解，任取$w \in V_0$，令$v = u + \lambda w$，其中λ 为任一实数。显然有$v \in V_{01}$，且

$$
\begin{aligned}
J(v) &= J(u+\lambda w) \\
&= \iint_a \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(u+\lambda w) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(u+\lambda w) \right)^2 \right] - f \cdot (u+\lambda w) \right\} \\
&\qquad dxdy \\
&= J(u) + \lambda \iint_a \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} - fw \right) dxdy \\
&\qquad + \frac{\lambda^2}{2} \iint_D \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy.
\end{aligned}
$$

由(1,12)，$J(u+\lambda)w$在$\lambda=0$ 取到极小值, 应有

$$\left.\frac{d}{d\lambda}J(u+\lambda w)\right|_{2=0}=0,$$
$$=\iint_O\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}-fw\right)dxdy=0. \tag{1.14}$$

但由格林公式

$$\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dxdy$$
$$=\iint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(w\frac{\partial u}{\partial y}\right)-w\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]dxdy$$
$$=\int_\Gamma w\frac{\partial u}{\partial n}ds-\iint_a\Delta u\cdot wdxdy.$$

由于$w \in V_n, w|_\Gamma = 0$, 上式右端第一项为0 ,从而由(1.14)得到, 对任何给定的$w \in V_0$, 成立

$$\iint_\Omega (\Delta u + f) w dxdy = 0. \tag{1.15}$$

由此可知, $\Delta u + f$ 在Ω 中必恒等于0 。事实上, 若$\Delta u + f$ 在Ω 中某点(x_0, y_0) 不等于0,不失一般性,设$(\Delta u + f)(x_0, y_0) > 0$, 则由$\Delta u + f$ 的连续性知, 必存在(x_0, y_0) 的一个邻域, 在此邻域中成立$\Delta u + f > 0$ 。这样, 取w 为在(x_0, y_0) 点附近大于0 , 而在其外等于0 , 就有

$$\iint_a (\Delta u + f) u dxdy > 0$$

而与(1.15)矛盾。因此, 在Ω 中必有

$$\Delta u + f \equiv 0.$$

又由$u \in V_0$, 因此$u|_r = 0$, 即u 为问题(1.13)的解。

反之，若$u \in V_0$ 是定解问题(1.13)的解,则对V_0 中的任一给定的w，成立

$$-\iint_{\Omega}(\Delta u + f)w dxdy = 0.$$

由此,利用格林公式易知，对任何给定的$w \in V_0$，成立

$$\iint_{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} - fw\right)dxdy = 0. \qquad (1.16)$$

任给$v \in V_0$，令$w = v - u \in V_0$，就有

$$\begin{aligned} J(v) =& J(u+w) = J(u) + \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} - fw\right)dxdy \\ &+ \iint_{\Omega}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dxdy. \end{aligned}$$

再利用(1.16) 即得

$$J(v) = J(u) + \frac{1}{2}\iint_{a}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dxdy.$$

注意到$w \in V_0$，我们有

$$J(v) \geqslant J(u),$$

且等号仅当$w \equiv 0$时成立。这就证明了u 满足(1.12) 式,即u 也是变分问题(1.12) 的解。证毕。

变分原理提供了研究偏微分方程边值问题的一个新观点和新途径。它也可以提供求偏微分方程边值问题的解(包括近似解)的方法。但是，定理1.1 本身并未告诉我们$J(v)$ 是否存在取极小值的元素，更没有回答$J(v)$ 是否在V_0 中取到极小值。因此，要用变分方法来研究狄利克雷问题(1.13) ,尚有一些基础性的工作要做。随着近代数学理论的发展，诸如积分(1.10)在哪种函数类中确实存在极小值等问题都得到了严格的阐述与论证，从而确立了变分原理在数学物理方程中的重要作用。

格林公式

- 设Ω 是以足够光滑的曲面Γ 为边界的有界区域(可以是多连通区域), $P(x, y\ Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 是在$\Omega \cup \Gamma$ 上连续,在Ω内有连续偏导数的任意函数,则成立

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\Omega$$
$$= \iint_{\Gamma} (P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)) dS,$$

其中$d\Omega$ 是体积微元, $\boldsymbol{n}$ 是Γ 的外法线方向, dS 是Γ 上的面积微元。

格林公式

- 设函数$u=u(x,y,z)$ 和$v(x,y,z)$ 以及它们的所有一阶偏导数在闭区域$\Omega\cup\Gamma$ 上连它们的所有二阶偏导数在Ω 内连续。在上式中令$P=u\frac{\partial v}{\partial x},Q=u\frac{\partial v}{\partial y},R=u\frac{\partial v}{\partial z}$，我们就得到**格林第一公式**。

格林公式

- 设函数$u=u(x,y,z)$ 和$v(x,y,z)$ 以及它们的所有一阶偏导数在闭区域$\Omega\cup\Gamma$ 上连它们的所有二阶偏导数在Ω 内连续。在上式中令$P=u\frac{\partial v}{\partial x}, Q=u\frac{\partial v}{\partial y}, R=u\frac{\partial v}{\partial z}$, 我们就得到**格林第一公式**。

$$\iiint_\Omega u\Delta v d\Omega$$
$$=\iint_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial n}dS-\iiint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)d\Omega, \tag{2.1}$$

中$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示外法向导数。

格林公式

- 在(2.1) 中将函数u, v 的位置交换，得

$$\iiint_{n} v\Delta u d\Omega = \iint_{\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) d\Omega. \tag{2.2}$$

自(2.1)减去(2.2)，我们就得到**格林第二公式**:

格林公式

- 在(2.1) 中将函数u, v 的位置交换，得

$$\iiint_n v\Delta u d\Omega = \iint_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}dS - \iiint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) d\Omega. \tag{2.2}$$

自(2.1)减去(2.2)，我们就得到**格林第二公式**:

$$\iint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)d\Omega = \iint_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n}dS - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS \tag{2.3}$$

公式(2.3) 对Ω 内二阶连续可导,在$\Omega \cup \Gamma$ 上有连续一阶偏导数的任意函数$u(x, y, z)$ 及$v(x, y, z)$ 成立。

格林公式

- 利用上述格林公式我们可推出调和函数的一些基本性质。首先我们导出调和函数的积分表达式。考察函数

$$v=\frac{1}{r_{M_0M}}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, \tag{2.4}$$

此处$M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ 是区域Ω 内的某一固定点。函数$\frac{1}{r_{M_0M}}$ 除点M_0 外处处满足方程(1.1), 它在研究三维拉普拉斯方程中起着重要的作用,称为三维拉普拉斯方程的**基本解**。在公式(2.3) 中取u 是调和函数,而取$v=\frac{1}{r_{M_0M}}$ 。由于函数v 在区域Ω 内有奇异点M_0, 因此对区域Ω 不能直接应用格林第二公式(2.3), 但是, 如果在区域Ω 内除去一个以M_0 为中心、充分小正数ε 为半径的球K_t, 则在剩下的区域$\Omega\backslash K_e$ 中函数v

格林公式

- 就是连续可导的了。在区域$\Omega\backslash K_c$ 上对上述的函数u 和v 应用公式(2.3)，得

$$\iiint_{\Omega\backslash K_t}\left(u\Delta\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\Delta u\right)d\Omega=\iint_{r\cup r_t}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS, \tag{2.5}$$

其中Γ，是球K_{a} 的表面。在区域$\Omega\backslash K$，内$\Delta u=0,\Delta\frac{1}{r}=0$ 。在球面Γ_{c} 上，由于

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^2}=\frac{1}{\varepsilon^2},$$

因此

$$\iint_{\Gamma_i}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\Gamma_e}udS=4\pi u^*,$$

格林公式

- 其中u^{*} 是函数u 在球面Γ, 上的平均值。类似地，有

$$\iint_{\Gamma_c} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\varepsilon}\iint_{\Gamma_t} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{*},$$

此处$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{*}$ 是函数$\frac{\partial u}{\partial n}$ 在球面Γ, 上的平均值。因此，由公式(2.5)得

$$\iint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS + 4\pi u^{*} - 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{*} = 0.$$

在上式中令$\varepsilon \to 0$, 就得到调和函数的基本积分公式

$$u\left(M_0\right) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Gamma}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right) - \frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right] dS_M. \tag{2.6}$$

格林公式

- 这样，对于在$\Omega\cup\Gamma$ 上有连续一阶偏导数的调和函数u，其在区域Ω 内任一点M_0 的值，可通过积分表达式(2.6) 用这函数及其法向导数在区域边界Γ 上的数值来表示。上面我们的推导是在假设点$M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 为区域Ω 中的点而进行的。如果把M_0 点取在Ω 之外或者取在Ω 的边界Γ 上，可以类似地得到另外两个式子。把它们与(2.6)式合并起来可写为

$$-\iint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\begin{cases}0 & (\text{若}M_0\text{ 在}\Omega\text{ 外}),\\ 2\pi u\left(M_0\right) & (\text{若}M_0\text{ 在}\Gamma\text{ 上}),\\ 4\pi u\left(M_0\right) & (\text{若}M_0\text{ 在}\Omega\text{ 内}).\end{cases}\tag{2.7}$$

同样，如果u 在$\Omega\cup\Gamma$ 上有连续的一阶偏导数，而在区域Ω 内，$\Delta u=F$，就可以得到与(2.6) 相类似的公式

格林公式

- $$u\left(M_0\right) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right) - \frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]dS_M - \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{F(M)}{r_{M_0M}}d\Omega_M. \tag{2.8}$$

- 格林公式立即得出调和函数的下述重要性质。

- 格林公式立即得出调和函数的下述重要性质。

定理2.1:设函数u在以曲面Γ为境界的区域Ω内调和，在Ω∪Γ上有连续一阶偏导数,则

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0. \tag{2.9}$$

■ 格林公式立即得出调和函数的下述重要性质。

定理2.1:设函数u在以曲面Γ为境界的区域Ω内调和，在Ω∪Γ上有连续一阶偏导数,则

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0. \tag{2.9}$$

证:只要在公式(2.3) 中取u 是所给的调和函数，而取$v \equiv 1$, 就得到(2.9)。

由此定理，我们得出诺伊曼内问题 $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = f$ 有解的必要条件是函数f 满足

$$\iint_{\Gamma} f dS = 0.$$

平均值定理

- 由(2.6) 式, (2.8) 的第一项是一个调和函数。于是, 由叠加原理得

$$v\left(M_0\right) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{F(M)}{r_{M_0M}}d\Omega_M \qquad (2.10)$$

是泊松方程

$$\Delta u = F$$

的一个特解(试与(1.3) 式相比较)。

平均值定理

- 由(2.6) 式, (2.8) 的第一项是一个调和函数。于是, 由叠加原理得

$$v\left(M_0\right)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{F(M)}{r_{M_0M}}d\Omega_M \tag{2.10}$$

是泊松方程

$$\Delta u=F$$

的一个特解(试与(1.3) 式相比较)。
在上段中,我们得到了将调和函数用其边界上的积分表示出来的公式(2.6), 由此就可以得到下面反映调和函数重要特性的平均值公式。

平均值定理

- 2. 平均值定理

定理2.2 (平均值公式) 设函数$u(M)$ 在某区域Ω 内调和，M_0 是Ω 中的任一点。则对以M_0 为中心a 为半径完全落在区域Ω 的内部的球面Γ_a，成立

$$u\left(M_0\right)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_{\Gamma_s} u dS. \tag{2.11}$$

平均值定理

- 2. 平均值定理

定理2.2 (平均值公式) 设函数$u(M)$ 在某区域Ω 内调和，M_0 是Ω 中的任一点。则对以M_0 为中心a 为半径完全落在区域Ω 的内部的球面Γ_a，成立

$$u\left(M_0\right)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_{\Gamma_s} udS. \tag{2.11}$$

证:把公式(2.6)应用到球心在点M_0 、半径为a 的球面Γ_a 上，得到

$$(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma_a}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS.$$

平均值定理

- 但在Γ_u 上$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}$, 于是由定理2.1 得
$$\iint_{\Gamma_a}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS=\frac{1}{a}\iint_{\Gamma_a}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0;$$
另一方面, $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_a}=-\frac{1}{a^2}$ (因为在球面Γ_a 上外法线方向与矢径方向一致), 于是
$$\iint_{\Gamma_a}u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}dS=-\frac{1}{a^2}\iint_{\Gamma_a}udS.$$
所以
$$u\left(M_0\right)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Gamma_a}udS$$
这就是所要证明的。

平均值定理

- 注:在证明这定理时,我们利用了等式(2.6), 它是在假设函数u在球面上导数$\frac{\partial u}{\partial n}$存王而推出的。如果函数$u(M)$在闭区域$\Omega\cup\Gamma$上连续, 在$\Omega$内满足方程$\Delta u=0$, 那么仅根居上面的推理尚不能断言对一个同$\Gamma$相切的球面$\Gamma_a$也成立(2.11)式。但因为公式(2.11)付任意一个$a<a_0$的球Γ_a总是正确的, 然后取极限$a\to a_0$, 即得关于Γ_a的公式(2.11)。

平均值定理

- 注:在证明这定理时,我们利用了等式(2.6),它是在假设函数u在球面上导数$\frac{\partial u}{\partial n}$存王而推出的。如果函数$u(M)$在闭区域$\Omega \cup \Gamma$上连续,在$\Omega$内满足方程$\Delta u = 0$,那么仅根居上面的推理尚不能断言对一个同$\Gamma$相切的球面$\Gamma_a$也成立(2.11)式。但因为公式(2.11)付任意一个$a < a_0$的球Γ_a总是正确的,然后取极限$a \to a_0$,即得关于Γ_a的公式(2.11)。

  3.极值函数

  调和函数的一个重要性质就是成立着极值原理,即它不能在区域内部取到极值。这从相应的物理模型中就可以直观地得到预示。以稳定温度场为例,此时热量由外面流人,经过物体内部流出,达到动平衡状态。

极值定理

- 因此，当物体内部没有热源时，温度分布不可能在内部有最高点或最低点，否则，由于热量要从温度高的地方流向温度低的地方，就会玻坏温度的稳定分布状态。这就是说，温度的最高点及最低点必在物体的边界上。这个事实可以用精确的数学语言叙述为如下的:

极值定理

- 因此，当物体内部没有热源时，温度分布不可能在内部有最高点或最低点，否则，由于热量要从温度高的地方流向温度低的地方，就会玻坏温度的稳定分布状态。这就是说，温度的最高点及最低点必在物体的边界上。这个事实可以用精确的数学语言叙述为如下的:

定理2.3 (极值原理) 对不恒等于常数的调和函数$u(x, y, z)$，其在区域Ω 的任何内点上的值不可能达到它在Ω 上的上界或下界。

极值定理

- 因此，当物体内部没有热源时，温度分布不可能在内部有最高点或最低点，否则，由于热量要从温度高的地方流向温度低的地方，就会破坏温度的稳定分布状态。这就是说，温度的最高点及最低点必在物体的边界上。这个事实可以用精确的数学语言叙述为如下的：

定理2.3 (极值原理) 对不恒等于常数的调和函数$u(x,y,z)$，其在区域Ω 的任何内点上的值不可能达到它在Ω 上的上界或下界。

证用反证法证明。设调和函数$u(x,y,z)$ 不恒等于常数，且在区域Ω 上的上界为m (这里自然假设函数$u(x,y,z)$ 在区域Ω 上有上界，在相反的情形下，定理是显然成立的)，而$u(x,y,z)$ 在Ω 内某点M_0 取值m，我们来引出矛盾。

极值定理

- 以M_0 为球心、任意半径R 作球K，使它完全落在区域Ω中。记K 的球面为S_R，在S_R 上必成立$u = m$ 。事实上，如果u 在球面S_R 上某一点其值小于m，则由函数的连续性，必可找到此点在球面S_R 上的一个邻域，在此邻域中$u < m$ 。因此u 在S_R 上的积分平均值

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iiint_{S_R} udS < \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_R} mdS = m;$$

但由平均值公式(2.11)，有

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_R} udS = u\left(M_v\right) = m,$$

这就发生了矛盾。

极值定理

- 因此在球面S_R上，u恒等于m。同理，在以M_0为心、任意$r(r \leqslant R)$为半径的球面上，u也恒等于常数m，因此，在整个球K上u恒等于常数m。
  现在证明对Ω中的所有点u都恒等于常数m。任取一点$M_1 \in \Omega$，在区域Ω中作联结M_0及M_1两点的折线γ，再用完全落在Ω中的有限个球$K_1, K_2, \cdots, K_n$盖住γ，使得K_1的球心为M_0，K_2的球心落在K_1中，K_3的球心落在K_2中，$\cdots, K_n$的球心落在K_{n-1}中(图3.1)。

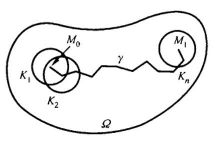

图 3.1

极值定理

- 根据上面证明的方法，可以依次证明在所有这些球所包围的区域上$u \equiv m$，因此，特别有$u(M_1) = m$ 。由M_1 的任意性,就得到在整个区域上$u(x, y, z) \equiv m$，这和u 图3.1 不恒等于常数相矛盾。因此u 不能在Ω 内部取到其上界。因为$-u$ 也是调和函数，从它在Ω 的内部不能取到它的上界，就得出u 也不能在Ω 内部取到其下界。这就证明了极值原理。

极值定理

- 根据上面证明的方法，可以依次证明在所有这些球所包围的区域上$u \equiv m$，因此，特别有$u\,(M_1) = m$ 。由M_1 的任意性,就得到在整个区域上$u(x, y, z) \equiv m$，这和u 图3.1 不恒等于常数相矛盾。因此u 不能在Ω 内部取到其上界。因为$-u$ 也是调和函数，从它在Ω 的内部不能取到它的上界，就得出u 也不能在Ω 内部取到其下界。这就证明了极值原理。
  推论1 在有限区域Ω 内调和、在$\Omega \cup \Gamma$ 上为连续的函数必在边界Γ 上取得其最大值和最小值。

极值定理

- 根据上面证明的方法，可以依次证明在所有这些球所包围的区域上$u \equiv m$，因此，特别有$u(M_1) = m$ 。由M_1 的任意性,就得到在整个区域上$u(x, y, z) \equiv m$，这和u 图3.1 不恒等于常数相矛盾。因此u 不能在Ω 内部取到其上界。因为$-u$ 也是调和函数，从它在Ω 的内部不能取到它的上界，就得出u 也不能在Ω 内部取到其下界。这就证明了极值原理。
  推论1 在有限区域Ω 内调和、在$\Omega \cup \Gamma$ 上为连续的函数必在边界Γ 上取得其最大值和最小值。
  推论2 设u 及v 都是区域Ω 内的调和函数，且在$\Omega \cup \Gamma$ 上连续。如果在Ω 的边界Γ 上成立着不等式$u \leqslant v$，那么在Ω 内上述不等式也成立；并且只有在$u \equiv v$ 时，在Ω 内才会有等号成立的可能。

4. 第一边值问题解的唯一性及稳定性

利用上面证明的极值原理，立刻可以推出调方程的狄利克雷内问题与外问题解的唯一性及稳定性。

先考察调和方程的狄利克雷内问题。我们有

定理2.4 方程(1.1) 的狄利克雷内问题(1.5) 的解如果存在，必是唯一的，而且连续地依赖于所给的边界条件f.

证事实上，假使有两个调和函数$u_1(x,y,z)$ 和$u_2(x,y,z)$，它们在有界区域Ω 的边界Γ 上完全相同，则它们的差$u=u_1-u_2$ 在Ω 中也满足方程(1.1)，而在Γ 上等于零。于是按照定理2.3 的推论1 ，函数u 在区域Ω 上最大值及最小值均为零，即$u\equiv 0$ 。因此，$u_1\equiv u_2$，即狄利克雷内问题的解是唯一的。

其次，设在区域Ω 的边界Γ 上给定了函数f 和f^*，而且在Γ 上处处成立$|f-f^*|\leq\varepsilon$，这里ε 是一个给定的正数。设u,u^* 分别是方程(1.1) 在区域Ω 上以f 和f^* 为边界条件的狄利克雷内问题的解，那么调和函数$u-u^*$ 在Γ 上取值$f-f^*$ 。由定理2.3 的推论1 得到,在Ω 上各点有

$$\max_{\Omega\cup\Gamma}(u-u^*)=\max_{\Gamma}(f-f^*)\leq\varepsilon,$$
$$\min_{\Omega\cup\Gamma}(u-u^*)=\min_{\Gamma}(f-f^*)\geq-\varepsilon.$$

因此，在Ω 上各点有

$$|u-u^*|\leq\max_{\Gamma}|f-f^*|\leq\varepsilon,$$

即狄利克雷内问题的解连续地依赖于所给的边界条件。证毕。

现在转而研究狄利克雷外问题。设函数u_1,u_2 是狄利克雷外问题的解，令$v=u_1-u_2$，则调和函数v 满足$v|_{\Gamma}=0$ 及

$$\lim_{r\to\infty}v(x,y,z)=0.$$

如果v 不恒等于零，则一定存在一点M，使$v(M)\neq 0$，不妨假设$v(M)>0$ 。以Γ_R 表示半径为R 的球面，当R 取得足够大，可使M 点落在由Γ 及Γ_R 所围成的区域Ω_R 中，且由条件

$$\lim_{r\to\infty} v(x,y,z) = 0$$

可得在Γ_R 上有$v|_{\Gamma_R} < v(M)$ 。因此调和函数v 在Ω_R 的边界Γ 及Γ_R 上都取不到最大值，这与极值原理矛盾，因此v 只能恒等于零。这样就得到

定理2.5 方程(1.1) 的狄利克雷外问题的解如果存在,则必是唯一的。

同样可以证明狄利克雷外问题的稳定性(作为习题)。

3 格林函数

1. 格林函数及其性质对于在区域Ω 中调和、在$\Omega \cup \Gamma$ 上具有一阶连续偏导数的函数u, 我们已有等式(2.6), 即

$$u\left(M_0\right) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left[u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{M_0 M}} \right) - \frac{1}{r_{M_0 M}} \frac{\partial u(M)}{\partial n} \right] dS_M,$$

其中点$M_0\left(x_0, y_0, z_0\right) \in \Omega$ 。这个公式用函数u 及其法向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$ 在边界Γ 上的数值把函数u 在区域Ω 内部的数值表示了出来，这自然使我们想到能否利用它来求解边值问题。但由于在这公式中同时需要u 以及$\frac{\partial u}{\partial n}$ 在Γ 上的数值，因此还不能直接利用它来求解调和方程的狄利克雷问题(1.1)、(1.5)或诺伊曼问题(1.1)、(1.6)。

例如对狄利克雷问题(1.1)、(1.5), u 在Γ 上的值是已给定的，但是$\frac{\partial u}{\partial n}$ 在Γ 上的值还不知道。那么除了给定u 在Γ 上的值外，是否还能任意再给定$\frac{\partial u}{\partial n}$ 在Γ 上的值呢？这不能，因为按定理2.4 已知狄利克雷问题的解是唯一的。为了克服这个困难，我们自然地想到设法消去公式(2.6) 中的$\frac{\partial u}{\partial n}$，这就需要引进格林函数的概念。

为此，在考察公式(2.6) 的同时，考察这样一个函数$g\left(M, M_0\right)$，它在区域Ω 内关于变量M 是到处调和的，并且在区域Ω 的边界Γ 上与函数$\frac{1}{4\pi r_{M_0 M}}$ 在边界Γ 上的值相同，即

$$g\left(M, M_0\right)\Big|_{\Gamma} = \left.\frac{1}{4\pi r_{M_0 M}}\right|_{\Gamma}. \tag{1}$$

由格林第二公式(2.3)得

$$\iint_{\Gamma}\left(g\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial g}{\partial n}\right) dS = 0.$$

将此式与(2.6)式相减，就得到

$$u\left(M_0\right)=\iint_{\Gamma}\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS_M, \tag{2}$$

其中函数

$$G\left(M,M_0\right)=\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}-g\left(M,M_0\right) \tag{3}$$

就称为方程(1.1) 狄利克雷问题的格林函数(或者称为狄利克雷问题的源函数)。由(3.1) 知$G\left(M,M_0\right)$ 在边界Γ 上恒等于零，因此，如果格林函数$G\left(M,M_0\right)$ 已经知道，并且它到边界为止具有一阶连续偏导数，那么由(3.2)式，方程(1.1) 取边界条件

$$u|_{\Gamma}=f(M) \tag{4}$$

的狄利克雷问题解就可表示为

$$u\left(M_0\right)=-\iint f\frac{\partial G}{\partial n}dS_M \tag{5}$$

格林函数

格林函数及性质

- 上面这种将边值问题的解用格林函数或者其导数的积分来表示的方法称为格林函数法。但要知道区域Ω上的格林函数,却必须求解调和方程(1.1)的一个特殊的狄利克雷问题:

$$g\mid_{\Gamma}=\left.\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}\right|_{\Gamma}.$$

而对于一般区域,要证明这种特殊的狄利克雷问题解的存在性,和证明在这区域上一般的狄利克雷问题解的存在性通常是同样困难的,因此上述方法尚不能有效地用来解决一般区域上拉普拉斯方程的狄利克雷问题。

格林函数及性质

- 但是，我们不能因此就否定格林函数法的意义，因为：(1)格林函数仅依赖于区域，而与边界条件无关。一旦求得了某个区域上的格林函数，这个区域上的一切狄利克雷问题的解的存在性也就得到了解决，且其解可用积分式表达出来；(2)对于某些特殊的区域，如球、半空间等，格林函数可以用初等方法求得，而这些特殊区域上的狄利克雷问题常常起着重要的作用；(3)公式(3.4)不仅对于问题的求解有意义，在已知狄利克雷问题解的存在性以后，还可以利用它对解的性质进行探讨。在下面一小段中我们将对一个最重要的区域——球上的格林函数进行研究。

格林函数及性质

- 现在先叙述格林函数的几个重要性质(其证明作为习题)。

性质1 格林函数$G(M,M_0)$除$M=M_0$一点外处处满足方程（1.1），而当$M\to M_0$时$G(M,M_0)$趋于无穷大，其阶数和$\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}$相同。

性质2 在边界Γ上的格林函数$G(M,M_0)$恒等于零。

性质3 在区域Ω中成立着不等式：

$$0<G(M,M_0)<\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}.$$

性质4 格林函数$G(M,M_0)$在自变量M及参变量M_0之间具有对称性，即设M_1，M_2为区域中的两点，则

$$G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1).$$

格林函数及性质

- **性质5** $\iint\limits_{\Gamma} \frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n} dS_M = -1.$

  格林函数在静电学中有明显的物理意义。设在点M_0处置一单位点电荷，那么它在自由空间所产生的静电场的电位为$\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}$。如果在M_0点的点电荷包围在一个封闭的导电面内，而这个导电面又是接地的，此时在导电面内的电位就可以用格林公式

$$G(M_1, M_2) = \frac{1}{4\pi r_{M_0M}} - g(M, M_0)$$

  来表示，它在导电面上恒等于零，而函数$-g(M, M_0)$正好表示导电面上感应电荷所产生的电位。因此，格林函数的性

格林函数及性质

- 质4在静电学上可表述为：M_1处的单位点电荷在M_2处产生的电位等于M_2处单位点电荷在M_1处所产生的电位。类似于这样的原理在物理中称为**互易原理**。
- ①精确地说，我们在这里证明了：如果在区域Ω上格林函数$G(M, M_0)$存在，并且它在$\Omega\cup\Gamma$上具有一阶连续偏导数，那么狄利克雷问题(1.1)、(1.5)在$\Omega\cup\Gamma$上具有连续一阶偏导数的解就可表示为(3.4)的形式。在实际应用时，由于事先并不知道狄利克雷问题在$\Omega\cup\Gamma$上具有连续一阶偏导数的解的存在，因此(3.4)只给出问题的形式解，为了证明它的确满足方程(1.1)及边界条件(1.5)，还必须进行验证。

静电源像法

- **2.静电源像法** 求区域Ω的格林函数归结为求函数$g(M, M_0)$，也就是求感应电荷产生的电位。当区域的边界具有特殊的对称性时，就可以用类似于求反射波的方法求得格林函数。
- 假设在区域外也有一个点电荷，它对自由空间的电场产生一个电位,如果这两个点电荷所产生的电位的在边界面上恰巧抵消，这个假设的点电荷在Ω内的电位就等于感应电荷所产生的电位。容易想像，这假想点电荷的位置应该是M_0关于边界曲面Γ的某种对称点。这种利用对称性求格林函数的方法：称为**静电源像法**(或称**镜像法**)。

静电源像法

- 现在利用静电源像法求球的格林函数。设K是以O为心、R为半径的球面(图3.2)。

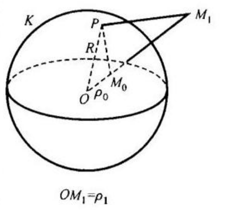

图 3.2

在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$放置一单位电荷，在半射线OM_0上截线段OM_1，使

静电源像法

- $$\rho_0\rho_1 = R^2, \tag{3.5}$$

  其中$\rho_0 = r_{OM_0}$，$\rho_1 = r_{OM_1}$，称为M_1为M_0关于球面K的反演点。设P是球面K上的任意给定一点，考察三角形OPM_0及OPM_1，它们在点O有公共角，而夹此角的二相应边按(3.5)式是成比例的，因此这两三角形相似。由相似性得到，对球面K上的任意点P必有

$$r_{M_1P} = \frac{R}{\rho_0} r_{M_0P}.$$

静电源像法

- 假想在点M_1处有一个点电荷，根据上式，为了使它所产生的电位在球面上恰巧与M_0 处单位点电荷所产生的电位抵消，必须假设在M_1处的点电荷带有的电量为$-\frac{R}{\rho_0}$，因此

$$g\left(M, M_0\right)=\frac{1}{4\pi}\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{M_1 M}}.$$

这样一来，以K为球面的球上的格林函数就是

$$G\left(M, M_0\right)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{M_0 M}}-\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{M_1 M}}\right). \tag{3.6}$$

调和方程

球的泊松公式

- 现在利用它求方程（1.1）在此球上满足边界条件

$$u|_K = f \tag{3.7}$$

的狄利克雷问题的解。为此，我们要算出$\frac{\partial G}{\partial n}$在球面K上的值。注意到

$$\frac{1}{r_{M_0M}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho\cos\gamma}}$$

$$\frac{1}{r_{M_1M}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho^2 - 2\rho_1\rho\cos\gamma}}$$

球的泊松公式

- 其中$\rho = r_{OM}$，γ是OM_0和OM的夹角
- 利用（3.5）式，由（3.6）式就得到格林函数

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho\cos\gamma}}\right.$$

$$\left. - \frac{R}{\sqrt{\rho_0^2\rho^2 - 2R^2\rho\rho_0\cos\gamma + R^4}}\right]$$

球的泊松公式

- 易知在球面K上，

$$
\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\rho=R} = \left.\frac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\rho-\rho_0\cos\gamma}{\left(\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{\left(\rho_0^2\rho-R^2\rho_0\cos\gamma\right)R}{\left(\rho_0^2\rho^2-2R^2\rho\rho_0\cos\gamma+R^4\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}\right|_{\rho=R}
$$

$$
= -\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{\left(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}
$$

球的泊松公式

- 因此，由(3.4)式得到在球上的狄利克雷问题的解的表达式:

$$u\left(M_0\right)=\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{K}\frac{R^2-\rho_0^2}{\left(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}f\left(M\right)dS_M \tag{3.8}$$

或写为球坐标的形式

$$u\left(\rho_0,\theta_0,\varphi_0\right)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f\left(R,\theta,\varphi\right)$$

$$\frac{R^2-\rho_0^2}{\left(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta d\theta d\varphi \qquad (3,8)^1$$

球的泊松公式

- 其中$(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$是点$M_0$的坐标，$(R, \theta, \varphi)$是球面K上点P的坐标，而

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$$

公式(3,8)或$(3,8)^1$称为**球的泊松公式**。

- 同样可以用静电源像法求解半空间的狄利克雷问题。要求一个在半空间$z > 0$上的调和函数$u(x, y, z)$，它在平面$z = 0$上取已给函数$f(x, y)$：

$$u\big|_{z=0} = f(x, y)$$

狄利克雷问题

- 注意点$M_0=(x_0,y_0,z_0)$的对称点是$M_0=(x_0,y_0,-z_0)$，其中$z_0>0$。所以，在现在的情况下，格林函数有下面的形状：

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right] \tag{3.9}$$

狄利克雷问题

- 对于半空间$z>0$来讲，平面$z=0$的外法线方向是与z轴相反的方向，即$\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial z}$。
- 此外，对于半空间的情形，只要对调和函数$u\left(x,y,z\right)$加上在无穷远处的条件：

$$u\left(M\right)=O\left(\frac{1}{r_{OM}}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial n}=O\left(\frac{1}{r_{OM}^{2}}\right)\left(r_{OM}\to\infty\right)$$

则仍可证明公式（2.6）成立，因而由格林函数表示的求解公式（3.4）仍成立。

狄利克雷问题

- 由公式（3.4）可得到半空间上调和方程（1.1）的狄利克雷问题的解的表达式为

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]\Bigg|_{z=0}\quad dxdy$$

狄利克雷问题

- 所以狄利克雷问题的解的表达式为

$$= \frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x,y)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}dxdy \tag{3.10}$$

- 用同样的方法可以求出圆上二维调和方程的狄利克雷问题

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, x^2 + y^2 < R^2 \tag{3.11}$$

$$u|_{x^2 + y^2 - R^2} = f(\theta) \tag{3.12}$$

的解，其中θ是极坐标的极角。

内容提要

格林函数

- 事实上,圆的格林函数可以像球的格林函数那样来作出,所不同的是在二维的情形,$\frac{1}{4\pi r}$应代之以$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$(参见§1 的习题1)。如同球那样,应用镜像法,可得圆的格林函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{M_0M}}-\ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{M_1M}}\right].$$

注意到

$$\frac{1}{r_{M_0M}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\,\rho\,\cos\,\gamma}},$$

$$\frac{1}{r_{M_1M}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_1^2+\rho^2-2\rho_1\rho\,\cos\,\gamma}},$$

格林函数

- 其中γ 是OM_0 和OM 的夹角,其余量的意义同球的情形(参见图3.3)。
  因为在平面的情形,OM_0与OM 的方向余弦分别是$(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$与$(\cos\theta, \sin\theta)$,
  故$\cos\gamma = \cos(\theta - \theta_0) = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0$.

格林函数

- 利用$\rho_0\rho_1 = R^2$,可得在圆周$\rho = R$ 上,

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\rho=R} &= \left.\frac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho}\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma}}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.-\ln\frac{R}{\sqrt{\rho_0^2\rho^2-2R^2\rho\rho_0\cos\gamma+R^4}}\right]\right\}\right|_{\rho=R} \\
&= -\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos\gamma+\rho_0^2}.
\end{aligned}
$$

格林函数

- 这样,由公式(3.4),立即可得圆上狄利克雷问题(3.11)、(3.12)解的表达式(同样称为泊松公式):

$$
\begin{aligned}
u(\rho_0, \theta_0) &= \frac{1}{2\pi R}\int_{x^2+y^2=R^2} \frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos\gamma+\rho_0^2} f(\theta)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(R^2-\rho_0^2\right)f(\theta)}{R^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2}d\theta.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

格林函数

- 3.解的验证

  在上段中,我们用静电源像法导出了在球、半空间和圆上调和函数的狄利克雷问题解的表达式。但它究竟是否确实是解,还需要加以验证。在这里我们仅对圆的情形进行验证,球和半空间情形的验证可以仿此进行。

  由格林函数$G(M, M_0)$的对称性,知道当M 取圆周上的点的时候,$G(M, M_0)$在圆内关于M_0点也是调和的。由此通过积分号下求导数的方法(当M_0在内部,M 在圆周边界上时,(3.13)式的积分核即$-\frac{\partial G}{\partial n^-}$无奇性)可知,由(3.13)式给出的函数确实在圆内满足调和方程(1.1)。

格林函数

- 现在再来验证函数u 满足边界条件(3.12),即当(ρ_0,θ_0)趋向于(R , θ)时,(3.13)式给出的$u(\rho_0,\theta_0)$趋向于$f(\theta)$。在(3.13)中引进新的积分变量$\varphi=\theta-\theta_0$,注意到$f(\theta)$以及$\cos(\theta-\theta_0)$都是θ 的周期函数,周期为2π,则(3.13)式可以改写为

$$u(\rho_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\star}\frac{(R^2-\rho_0^2)f(\varphi+\theta_0)}{R^2-2R\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}d\varphi. \qquad (3.14)$$

由格林函数的性质5,有

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}d\varphi,$$

格林函数

$$u(\rho_0,\theta_0)-f(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}[f(\varphi+\theta_0)-f(\theta)]d\varphi. \tag{3.15}$$

我们要证明,当$\rho_0\to R,\theta_0\to\theta$ 时,(3.15)式右边的积分趋于零。在$f(\theta)$为连续的假设下, 对于任意给定的正数 ε ,存在正数η,使得在区间$-\eta\leqslant\varphi\leqslant\eta$ 上,当θ 与θ_0 足够接近时,有

$$|f(\varphi+\theta_0)-f(\theta)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

把积分区间分成三部分:

$$(-\pi,-\eta),(-\eta,\eta)及(\eta,\pi),$$

格林函数

- 并将(3.15)式右边的被积函数在此三部分的积分分别记为I_1, I_2 及I_3。于是

$$|\, u(\rho_0, \theta_0) - f(\theta) \,|=|\, I_1 + I_2 + I_3 \,|\leqslant|\, I_1 \,| + |\, I_2 \,| + |\, I_3 \,| \,.$$

考察第一个区间上的积分I_1。由于在区间$(-\pi, -\eta)$上$\cos\varphi \leqslant \cos\eta$，就有

格林函数

$$-2R\rho_0 \cos\varphi + \rho_0^2 \geqslant R^2 - 2R\rho_0 \cos\eta + \rho_0^2$$

$$= (R-\rho_0)^2 + 2R\rho_0(1-\cos\eta)$$

$$\geqslant 4R\rho_0 \sin^2\frac{\eta}{2},$$

格林函数

- 又由于f 连续,所以$|f(\varphi+\theta_0)-f(\theta)|\leqslant M$,其中M 为某一确定的正数。于是,对于第一个区间的积分,有估计

$$| I_1 |\leqslant \frac{M}{8\pi R\rho_0 \sin^2\frac{\eta}{2}}(R^2-\rho_0^2)(\pi-\eta). \qquad (3.16)$$

对于I_3,也可以类似地得到同样的估计。从这些估计可看到,当ρ_0趋于R时,I_1 和I_3均趋于零。

格林函数

- 另一方面,注意到$\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}\geqslant 0$,对于$I_2$有估计

$$|I_2|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\frac{R^2-\rho_0}{R^2-2R\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}d\varphi$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}d\varphi=\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3.17)$$

由于 ε 的任意性,可以肯定,当$(\rho_0,\theta_0)\rightarrow(R,\theta)$时,$u(\rho_0,\theta_0)$确实趋向于$f(\theta)$。
这就证明了$u(\rho_0,\theta_0)$确实是圆上狄利克雷问题的解。

格林函数

- 4.单连通区域的格林函数
  在这一段中,我们要说明对于平面上单连通区域的格林函数,可以通过共形映射的办法化为单位圆上的问题而求得。我们知道,平面上调和方程狄利克雷问题的格林函数可以表示为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}} - g(M, M_0),$$

  其中$g(M, M_0)$在区域Ω 内调和,并且在Ω 的边界Γ 上与$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M,M}}$的数值相等。

格林函数

- 为方便起见,将(x,y)平面看成复数z 的平面,其中$z=x+iy$,并用z 及z_0 分别表示点M 及M_o 的坐标。于是,

$$G(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-z_0|}-g(z,z_0).$$

先考察Ω为单位圆而$z_0=0$ 的情形。此时$\ln\frac{1}{|z|}$在圆周$|z|=1$上恒等于零,故由极值原理易知有

$$G(z,0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z|}.$$

格林函数

- 现在考察一般区域的情形。
  设解析函数$z=f(\zeta), f(\zeta_0)=z_0$,将$\zeta$平面上的闭区域$\Omega_1\cup\Gamma_1$单叶地映射到$z$平面上的闭区域$\Omega\cup\Gamma$,其中$\Gamma$及$\Gamma_1$分别是$\Omega$及$\Omega$,的边界。
  如果$G(z,z_0)$是区域Ω上的格林函数,
  那么区域Ω_1上的格林函数就应为

$$G_1(\zeta,\zeta_0)=G(f(\zeta),f(\zeta_0)). \tag{3.18}$$

格林函数

- 这是因为$G(f(\zeta), f(\zeta_0))$在$\zeta \in \Gamma_i$时等于零,并且

$$G(f(\zeta), f(\zeta_0)) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(\zeta) - f(\zeta_0)|} - \xi(f(\zeta), f(\zeta_0))$$
$$= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} - \chi_1(\zeta, \zeta_0),$$

其中

$$\wp_1\left(\zeta \quad \zeta_0\right) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|f(\zeta) - f(\zeta_0)|}{|\zeta - \zeta_0|} + \wp\left(f(\zeta), f(\zeta_0)\right)$$

在整个区域Ω ,中,包括$\zeta = \zeta_0$ 一点在内都是调和的。

格林函数

- 由黎曼(Riemann)映射定理可知:对于任一给定的单连通区域必存在一个共形映射,将此单连通区域映射到单位圆,并将区域内一点ζ_0映到单位圆的圆心$z_0=0$。由于单位圆的格林函数由上段讨论是知道的,从而一般单连通区域的格林函数也可由(3.18)得到。

格林函数

- 例如,在Ω_1是上半平面时,由于函数$z=\frac{\zeta_0}{\zeta-\frac{\zeta_0}{\zeta_0}}$,将$\Omega_1$映射到单位圆,并将$\zeta=\zeta_0$映射到$z=z_0=0$,由上面的讨论,可得上半平面$\eta>0$ 的格林函数为

$$G_1(\xi,\xi_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\xi-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right|=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(\xi-\xi_0)^2+(\eta+\eta_0)^2}{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2}},\tag{3.19}$$

其中$\zeta=\xi+i\eta,\zeta_0=\xi_0+i\eta_0$。经过简单的运算可以看到,这和镜像法所得结果相同。

格林函数

- 5.调和函数的基本性质

  除了上节中所述的调和函数一些性质外,现在我们利用泊松公式(3.8)来证明调和函数的另外一些重要性质。

  定理3.1 (哈那克(Harnack) 第一定理(关于调和函数序列的一致收敛性定理)) 如果函数序列$\{u_k\}$中的每个函数在某有限区域Ω中都是调和函数,在闭区域$\Omega\cup\Gamma$(Γ是Ω 的边界)上连续,而且这函数序列在Γ上一致收敛,则它在Ω中也一致收敛,并且极限函数u 在区域Ω 中也是调和函数。

格林函数

- 证

以f_k表示调和函数u_k在Γ上的值。按假设,连续函数序列$|f_k|$在Γ上一致收敛，即对任意给定的 ε ¿0,存在这样的N,使当n ,$m > N$ 时,在Γ 上处处有$|f_n - f_m| \leqslant \epsilon$。由极值原理,对于这些$n, m$,在Ω 中处处有$|u_n - u_m| \leqslant \varepsilon$。所以根据柯西判别法知道调和函数序列$\{u_k\}$在$\Omega$中也一致收敛。为证明其极限函数$u$在$\Omega$中是调和函数,只要证明$u$在$\Omega$ 中任一点的邻域中是调和函数就可以了。

为此,在Ω内任取一点M_0,以M_0为中心作一位于Ω内的球K。在此球上,每一个调和函数u_k 均可用泊松公式(3.8)’ 表为

$$u_k\left(\rho_0 \quad ,\theta_0 \quad ,\varphi_0\right) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_k\left(R \quad ,\theta \quad ,\varphi\right) \qquad (3.20)$$

格林函数

- 其中R 是球K 的半径,$(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$是点$M_0$ 的球坐标。因为函数序列$|u_k(R,\theta,\varphi)|$一致收敛于u,在上式两边令$k\to\infty$取极限就得到

$$u(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u(R,\theta,\varphi)$$

$$(R^2-\rho_0^2)\sin\theta\,d\theta d\varphi\ /$$

$$\{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0[\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]\}^{\frac{3}{2}},$$

于是极限函数u 仍可由泊松公式表达,从而函数u 是球K 内的调和函数。定理证毕。

格林函数

- 定理3.2(哈那克第二定理) 设$|u_k|$是Ω上的一个单调不减的调和函数序列,若它在Ω 内的某一点P收敛,则它在Ω 中处处收敛于一个调和函数u,并且这种收敛在Ω 的任一闭子区域上是一致的。

  证

  作以P点为球心、半径为R 的完全落在Ω 中的球K_κ。设Q是K_κ上的任一点。

  对K_κ中的任意调和函数u,由泊松公式(3.8),成立

$$u\,(Q) \;=\; \frac{1}{4\pi R}\iint_{\kappa_R}\frac{R^2-\rho_0^2}{(\,R^2\;+\;\rho_0^2-2R\rho_0\;\cos\;\gamma\,)^{\frac{3}{2}}}\,u\,(\,M)\,dS_M\,.$$

格林函数

- 若$u \geqslant 0$,就可以利用u在球心P的值来估计$u(Q)$的值。事实上,注意到

$$\frac{R^2-\rho_0^2}{(R+\rho_0)^3} \leqslant \frac{R^2-\rho_0^2}{\left(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{R^2-\rho_0^2}{(R-\rho_0)^3},$$

$$\frac{1}{4\pi R}\iint_{\kappa_R} u(M)\,dS_M \cdot \frac{R-\rho_0}{(R+\rho_0)^2} \leqslant u(Q) \leqslant \frac{1}{4\pi R}\iint_{\kappa_R} u(M)\,dS_M \cdot \tag{3.21}$$

利用调和函数的平均值公式,上式即为

$$\frac{R-\rho_0}{(R+\rho_0)^2}R\cdot u(P) \leqslant u(Q) \leqslant \frac{R+\rho_0}{(R-\rho_0)^2}R\cdot u(P).$$

格林函数

- 现对于给定的调和函数序列$\{u_k\}$,令$v_k = u_k - u_{k-1} \geqslant 0, k = 2, 3, \cdots$。对$v_k$用哈那克不等式就得到

$$\frac{R-\rho_0}{(R+\rho_0)^2} R \cdot v_k(P) \leqslant v_k(Q) \leqslant \frac{R+\rho_0}{(R-\rho_0)^2} R \cdot v_k(P). \quad (3.22)$$

对任意的m 和$n > m$,由于$u_n - u_m = \sum_{i=1}^{\infty} v_k$,注意到$\{u_k(P)\}$的收敛性,由上式易知$k = m + 1$ $|u_k(Q)|$在$K_{R/2}$上一致收敛。由哈那克第一定理,$|u_k(Q)|$在$K_{k/2}$上一致收敛于一个调和函数$u(\mathbf{Q})_0$

格林函数

- 对任一点$M \in \Omega$,可以用完全落在Ω中的折线γ连接P和M,而γ可以用有限个完全落在Ω 中的球覆盖。对这些球逐一运用上述推理,即得$|u_k|$在M 点收敛,从而u在Ω内处处收敛于调和函数u(参见定理2.3 的证明)。因u_k在Ω 中处处收敛,特别在每个闭球K,的球心M_i 处收敛,从而u_k在$K_i(i=1,2,\cdots,L)$上一致收敛,于是在F 上也一致收敛。这就完成了定理的证明。

格林函数

- 定理3.3 设u 为区域Ω 中的非负调和函数,则对Ω 中的任一闭子区域$\overline{\Omega}'$,存在仅与Ω'有关的正常数C,使得

$$\max_{\overline{a}'} u \leqslant C \min_{\overline{a}'} u\,. \tag{3.23}$$

证

记$\overline{\Omega}$与Ω的边界Γ的距离为R。由有限覆盖定理,$\overrightarrow{\Omega}$可由N 个半径为$\frac{\mathrm{R}}{2}$的球覆盖。对0$\leqslant \rho_0 \leqslant \frac{R}{2}$,有不等式

$$\frac{(R-\rho_0)\,R}{(R+\rho_0)^2} \geqslant \frac{2}{9}\,, \quad \frac{(R+\rho_0)\,R}{(R-\rho_0)^2} \leqslant 6.$$

格林函数

- 于是,由(3.21)式可得,对任一用于覆盖的半径为$\frac{R}{2}$的球中的任意两点P_1, P_2,成立

$$\frac{2}{9}u\left(P_{1}\right) \leqslant 6u\left(P_{2}\right)$$

即

$$u\left(P_1\right) \leqslant 27u\left(P_2\right).$$

由于u在$\overline{\Omega}$上的极大点与极小点必分别落在某个半径为$\frac{R}{2}$的覆盖球中,取$C=(27)^N$,即得(3.23)式。

格林函数

- 利用泊松公式及极值原理还可以研究调和函数在孤立奇点附近的性质。我们有定理3.4(可去奇点定理)
  设$u(M)=u(x,y,z)$在点A 的邻域中除点A 外是调和函数,在A 点附近成立

$$\lim_{M\to A} r_{AM}\cdot u(M) = 0, \tag{3.24}$$

  其中r_{AM}表示A点和M点的距离,则总可以重新定义函数u在点A 的值,使$u(M)$在整个所考虑的点A 的邻域中(包括点A 本身在内)是调和函数。

格林函数

- 证
  为简单起见,不妨取点A 为坐标原点。设K 是一个以A 点为心、R 为半径的球,它整个地包含在点A 的那个所考察的邻域中。以u在K 上的值为边界条件,在K 内求拉普拉斯方程的解,它可由泊松公式给出,记为u_1。我们要证明,在整个球K 内除点A 外$u \equiv u_1$。这样,就可以重新定义函数u 在点A 的值等于函数u_1在点A 的值,因此就证明了定理。记$w = u - u_1$。函数w 在整个球K 内除A 点外是调和函数,在点A,由(3.24)有

$$\lim_{M \to A} r_{AM} \cdot w(M) = 0\,, \tag{3.25}$$

格林函数

- 现在证明在整个球K 内除点A 外$w \equiv 0$。为此,作函数

$$w_* (M) = \varepsilon \left(\frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{R} \right), \tag{3.26}$$

它具有如下的性质: (1)在球K 的界面上$w_t(M) = 0$;在K内$w_1(M) \geq 0$。(2)在球$r = \delta$及$r = R$ 所包围的同心球壳D 内是调和函数,这里δ 是一个任意小的正数。对任意给定的正数 ε ,注意到(3.25),总可以找到适当小的$\delta > 0$,使在球面$r = \delta$ 上有

$$| w | \leqslant w_\epsilon ,$$

格林函数

- 而在K 的界面上,函数w 和w_ϵ都等于零。于是由定理2.3(极值原理),对区域D 中的任何点M都有

$$| w(M) |\leqslant w_\epsilon(M). \tag{3.27}$$

固定M,令 ε →0,上式右端趋于零,因此左端等于零,即$w(M)=0$。由于M 是D 中的任意一点,因此在D 中$w\equiv 0$。再注意到$\delta>0$ 的任意性,在整个球K 内除A 点外$w\equiv 0$。定理证毕。

由定理3.4 可以得到

推论如果A 确实是调和函数$u(M)$的孤立奇点(即是不可除去的奇点),那么$u(M)$

在A 点附近趋于无穷大的阶数不会低于$\frac{1}{r_{M}}$.

格林函数

- 现在利用泊松公式来说明调和函数的另一个重要性质,即调和函数关于它的所有自变量都是解析的。

  定理3.5 (调和函数的解析性定理)

  设$u(M_0)$是区域Ω 中的调和函数,那么它在Ω 中是关于自变量x_0, y_0, z_0的解析函数，也就是说在Ω 中任一点$M_0^*(x_0^*, y_0^*, z_0^*)$的附近，它都可以展开成$x_0 - x_0^*, y_0 - y_0^*, z_0 - z_0^*$的幂级数。

格林函数

- 证对于Ω 中任给一点M_0^*,以M_0^*为心作一个球K,使它全部落在Ω 中,设它的半径为R。由于$u(M_0)$在Ω 中是调和的,函数u在球K 内的值可以利用泊松公式由u 在球面K 上的值给出

$$
\begin{aligned}
u\left(M_0\right) &= \frac{1}{4\pi R}\iint_K u\left(M\right)\frac{R^2-\rho_0^2}{\left(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}dS_M \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{\pi R}\iint_\kappa u\left(M\right)\frac{R^2-\rho_0^2}{r_{M_0M}^3}dS_M .
\end{aligned}
$$

格林函数

- 利用二项式定理可以将上式右端展开为x_0, y_0, z_0的幂级数。当(x, y, z)在球面K 上,而(x_0, y_0, z_0)在原点附近时这幂级数是一致收敛的,因此可以逐项求积分,而且积分后仍得到一个关于x_0, y_0, z_0为一致收敛的幂级数,因此$u(M_0)$在$M_0 = M_0^*$处是解析的。由点M_0^* 的任意性知道$u(M_0)$在Ω 内处处解析。定理证毕。

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 1.强极值原理

  我们知道,调和方程描写的是稳态平衡的物理现象。仍以稳定的热传导情形为例,由极值原理知道,温度的最高点及最低点必在物体的边界上取到。对在边界上的温度最低点(对温度最高点也可类似地讨论),物体其它各点的热量必流向它,并且通过它流向物体外部,因此在该点应有$\frac{\partial u}{\partial n}\leqslant 0$ (这里n 是外法线方向)。由此启发,再从数学上加以分析和论证,可得如下的更强的结果。

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 定理4.1 (强极值原理)
  设在半径为R 的某一球上(包括球面在内)给定一个连续函数$u(x,y,z)$,它在此球内是调和的,并且对此球的所有内点(x,y,z),成立着$u(x,y,z) > u(x_0,y_0,z_0)$,其中$(x_0,y_0,z_0)$是球面上的某定点。如果函数$u(x,y,z)$在点$(x_0,y_0,z_0)$沿方向 ν 的方向导数存在,而方向 ν 与球的内法线方向成锐角,则在点(x_0,y_0,z_0)成立

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0.$$

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 证
  因为调和函数在经过坐标轴的平移变换后仍然是调和函数,我们不妨假设球心就是坐标原点。由于$u(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)取最小值,因此在点(x_0,y_0,z_0)总有

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \geqslant 0.$$

如果能引进一个函数$\tilde{u}(x,y,z)$,使函数$w(x,y,z)=u-\tilde{u}$在(x_0,y_0,z_0)的附近成立$w(x,y,z)\geqslant w(x_0,y_0,z_0)$,而函数$\tilde{u}(x,y,z)$在点$(x_0,y_0,z_0)$处的方向导数$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}>0$, 那么由于在点$(x_0,y_0,z_0)$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}=\frac{\partial w}{\partial \nu}\geqslant 0$$

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 函数$\vec{u}$ 将取成$\varepsilon v+u(x_0,y_0,z_0)$的形式,使函数$\hat{u}(x,y,z)$之图像插人函数$u(x,y,z)$的图像与高度为$u(x_0,y_0,z_0)$的超平面之间。显然,在$(x_0,y_0,z_0)$点函数$v$ 应取其极小值0,且$\frac{\partial v}{\partial \nu}>0$,并在该点附近成立$\varepsilon v+u(x_0,y_0,z_0)<u$。
  为了做出这样的v ,我们使它的形式尽可能地简单。于是,取v是变量r 的函数($r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$),且满足
  (1) 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ $v=0$;
  (2)在同心球壳所围成的闭区域$D:\frac{R^2}{4}\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$内$v$ 具有二阶连续偏导数,且$\Delta v>0$;

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- (3) v 沿球的半径方向的导数 $\frac{dv}{dr}$ 存在,且 $r>0$ 时 $\frac{dv}{dr}<0$,从而在球面 $x^2+y^2+z^2=$

$$R^2 \perp \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{dv}{dr}\cos(\nu, r) > 0.$$

如果这样的函数 $v(x,y,z)$ 存在,则当 ε ¿0 足够小时,函数 $\tilde{u} = \varepsilon v + u(x_0, y_0, z_0)$ 就是我们所要找的函数。
事实上,在 (x_0, y_0, z_0) 点显然满足,我们只要证明当 $\varepsilon > 0$ 足够小时,在区域D 上成立

$$w(x,y,z) = u - \varepsilon v - u(x_0, y_0, z_0) \geqslant w(x_0, y_0, z_0) = 0$$

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 由于在D 中,$\Delta w = -\Delta \tilde{u} = -\varepsilon \Delta v < 0$,因此函数$w$ 在D 内不能取到其最小值。但在区域D 的边界上恒有$w(x, y, z) \geqslant 0$。事实上,在球面$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{R^2}{4}$上,由于$u(x, y, z) > u(x_0, y_0, z_0)$,只要取 ε ¿0 足够小就可使在球面上$w(x, y, z) > 0$;而在球面$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上显然有$w(x, y, z) \geqslant 0$。这样,在整个区域D 上都有$w(x, y, z) \geqslant 0$, 这就是所要证明的。
  现在我们来证明上述函数$v(x, y, z)$的确是存在的。

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 作函数$v(x,y,z)=e^{-u(z^2+y^2+z^2)}-e^{-uR^2}$,其中a 是一个待定的正常数。我们要验证：当a 适当大时,它就是满足上述要求的函数v。条件(1)和(3)显然满足,下面来验证条件(2)。v 的二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=(-2a+4a^2x^2)e^{-a(x^2+y^2+z^2)},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=(-2a+4a^2y^2)e^{-u(x^2+y^2+z^2)},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=(-2a+4a^2z^2)e^{-a(\iota^2+y^2+z^2)}.$$

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 因此，

$$\Delta v = 1 - 6a + 4a^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) | e^{-a(x^2+y^2+z^2)} .$$

由于在D上$x^2 + y^2 + z^2 \overset{R^2}{4}$,总可以取适当大的$a > 0$,使在$D$内成立$\Delta v > 0$,即条件(2) 满足。定理证毕。

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 由上述对于球的强极值原理,可以得到具有某种性质的一般区域的强极值原理。

  定理4.2 设区域Ω 具有下述性质:对Ω 的边界Γ 上的任一点M,都可作一个属于区域Ω(连同其边界Γ)的球K_M,使其在点M 与Γ 相切。如果不恒等于常数的调和函数$u(x,y,z)$在$\Omega\cup\Gamma$ 上连续,在边界点M_0 处取最小(最大)值,则只要它在点M_0 处关于Ω 的外法向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$存在,其值必是负(正)的。

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 证

  取定一球K_{M_0},由假设它的所有内点都属于Ω。由于调和函数$u(x,y,z)$不恒等于常数,根据极值原理,它不能在Ω的内点取到最小值,因此$u(x,y,z)$在K_{M_p}的所有内点上的值恒大于u在点M_0的值。由定理4.1,只要导数$\frac{\partial u}{\partial n}$存在,它在点$M_0$处的值必是负的。

  在Γ上使函数$u(x,y,z)$取到最大值的那些点处,函数$-u$取到最小值,因此在这些点处应有$\frac{\partial(-u)}{\partial n}<0$,即$\frac{\partial u}{\partial n}>0$。定理证毕。

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- **2.第二边值问题解的唯一性**

  上段得到的强极值原理可以用来研究调和方程的第二边值问题的解的唯一性。现在研究调和方程(1.1)的诺伊曼内问题。容易看出此问题的解如果存在,那么就不会唯一。因为如果u是诺伊曼内问题的解,那么$u+c$也必是同一诺伊曼内问题的解,其中c为任意常数。但我们可以证明下面的

  定理4.3 如果区域Ω的边界Γ满足定理4.2中的条件,那么同–个诺伊曼内问题的解彼此间只能相差一个常数。也就是说,诺伊曼内问题的解除去一常数外是唯一的。

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 证

设$u_1(x,y,z)$和$u_2(x,y,z)$在Ω内都是调和函数,在$\Omega\cup\Gamma$上连续,而且在Γ上满足同样的边界条件: $\frac{\partial u_1}{\partial n}=\frac{\partial u_2}{\partial n}=f$,那么函数$u=u_1-u_2$在$\Omega$内也是调和函数,在$\Omega\cup\Gamma$上连续,而且在$\Gamma$上$\frac{\partial u}{\partial n}=0$。如果函数$u$ 不恒等于常数,则由极值原理,知其最小值必在Γ 上达到,再由定理4.2,在u 取最小值的点处导数$\frac{\partial u}{\partial n}$就不能等于零,从而导致矛盾。因此$u$必等于一个常数。定理证毕。

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 现在我们来证明诺伊曼外问题的唯一性。
  设区域Ω的边界Γ具有这样的性质。在其上每一点均可作一完全落在Ω 外(即在外部区域Ω'中)且与Γ相切的球。如果同一诺伊曼外问题有两个解u_1, u_2,令$v = u_1 - u_2$, 则v 满足边界条件 $\frac{\partial v}{\partial n'}\Big|_F = 0$($n'$为区域$\Omega'$的单位外法线方向),在区域$\Omega'$中为调和,在$\Omega' \cup \Gamma$上连续,且在无穷远处一致地趋近于零。我们要证明$_{v=0}$。因$v$在无穷远处的极限为零,对任意给定的$\varepsilon > 0$,必可找到充分大的R ,使在以R 为半径的球面$\Gamma_R : r = R$ 上每一点P都有$|v(P)| \leqslant \varepsilon$。

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 于是在由Γ 及Γ_k 所围成的区域Ω_k 上函数v 只能在球面$r = R$ 上取到极值。这是因为按极值原理,v 不能在Ω_k 内部取到极值,再按定理4.2,它又不能在Γ 上取到极值。因此在Ω_k上任一点都有$|v| \leqslant \varepsilon$。由于 ε 可以任意小,因此在整个$\Omega'$上,必有$v \equiv 0$。于是得到

定理4.4 方程(1.1)的诺伊曼外问题的解如果存在,必是唯一的。

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- **3.用能量积分法证明边值问题的解的唯一性**

  我们已经用极值原理和强极值原理分别证明了调和方程第一边值问题与第二边值问题的解的唯一性。如局限于讨论$C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$中的调和函数,可以利用能量积分方法更简洁地证明这两类边值问题的解的唯一性。

  在有界区域Ω 上的泊松方程的第一或第二边值问题的解的唯一性可以归结为讨论Ω 中的调和函数$u\in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\bar{\Omega})$,在边界$\Gamma$上分别满足$u=0$或$\frac{d}{\partial x}=0$ 时的性态。

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 我们已知,对调和函数u ,能量积分(总位能)为

$$E(u)=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz$$
$$=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)-u\Delta u\right]$$

由于u为调和函数,并利用格林公式可得

$$E(u)=\frac{1}{2}\iint_{\Gamma}u\frac{\partial u}{\partial n}dS\,.$$

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 在讨论第一边值问题唯一性时,成立$u|_\Gamma = 0$;在讨论第二边值问题时, 成立 $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0$ 因此, 总成立

$$E(u) = 0,$$

从而,在Ω中成立

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

强极值原理、第二边值问题解的唯一性

- 即$u \equiv C$(常数)．
  对第二边值问题,上式已经意味着满足同一泊松方程第二边值问题的解最多只能相差一个常数,即在允许相差一个任意常数的意义下,解是唯一的。
  对于第一边值问题,由于在边界Γ上成立$u=0$,因此只能成立
  $$u \equiv 0$$
  这就证明了泊松方程第一边值问题的$C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$解是唯一的。


谢谢大家！